Cours de Mécanique du point matériel

1ère Année

Semestre 1

Filière: SMI/A

Année universitaire : 2020/2021

Plan général du cours

Introduction

Chapitre I: Outils mathématiques

Chapitre II: Cinématique du point matériel

Chapitre III: Dynamique du point matériel: lois du mouvement

Chapitre IV: Théorème généraux

Chapitre V: Oscillateurs harmoniques

Introduction

L'objectif de la mécanique classique

appelée aussi mécanique newtonienne

est la description et la prédiction

des <u>mouvements</u> d'objets

observables dans l'univers

La mécanique peut être divisée en trois parties principales :

☞ **La cinématique :**

étudié les mouvement des corps dans l'espace

en fonction du temps indépendamment des causes qui les provoquent

☞ **La dynamique :**

l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps

et les causes qui le produisent

☞ **La statique :**

considérée comme un cas particulier de la dynamique,

correspond à l'étude des équilibres et de leur stabilité.

Dans ce cours , on va s'intéresser à :

la mécanique du point matériel

<u>Un point matériel</u> :

Objet infiniment petit devant les distances caractéristiques du mouvement

<u>Remarque</u> : Dans de nombreux cas, la géométrie influe dans le mouvement des corps (rotation).

Dans cette situation, on fait appel à *<u>la mécanique du solide.</u>*

Chapitre I

Outils mathématiques

I.1 Dimensions et unités

La nature d'une grandeur physique se reconnaît par sa dimension.

La dimension d'une grandeur physique G se note par l'expression [G].

Exemple: **La dimension de la vitesse est : m/s**

La dimension de la vitesse se note : [V]

Toutes les dimensions s'expriment à partir des grandeurs fondamentales :

Grandeur	Unité	Symbole
Masse	Kilogramme	kg
Longueur	Mètre	m
Temps	Seconde	s
Intensité du courant	Ampère	A
Température	Kelvin	K
Quantité de matière	Mole	mol
Intensité lumineuse	Candela	Cd

Système internationales d'unités : SI

Remarques

- **Dans une relation entre grandeurs, on remplace chaque terme par la grandeur fondamentale correspondante**

  L pour une longueur, T pour un temps,

  M pour une masse, I pour une intensité électrique…

  On obtient ainsi l'équation aux dimensions.

  Exemple

$$Vitesse = \frac{dis\tan te}{temps}$$

  Dimension d'une vitesse est :

$$[V] = LT^{-1}$$

  Equation aux dimensions.

- **On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension**

  ~~2kg + 5A~~

- **La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs:**

$$[AB] = [A][B]$$

- **La dimension de A^n est égale à $[A]^n$ où n est un nombre sans dimension**

$$[A^n] = [A]^n$$

- **Pour les fonctions suivantes: sin(u), cos(u), tan(u), ln(u), log(u) et e^u , la grandeur u est sans dimension.**

- **Une équation doit être homogène**

$$xy = z^2+t \longrightarrow [xy] = [z^2+t]$$

Exemple :

$$F = m.\gamma \longrightarrow [F] = [m.\gamma] \longrightarrow [F] = [m].\frac{[V]}{[t]} = [m].\frac{[d]}{[t]^2}$$

$$[F] = M.\frac{L}{T^2} = Kg.m/s^2$$

vérification de l'homogénéité de l'expression de la période d'un pendule simple :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{ou} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$$

La période propre *T* → **seconde (s),**

la longueur l du fil, → **mètre (m)**

l'intensité du champ de gravitation → **(m/s²)**

1er cas :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\left(\frac{m}{m/s^2}\right)^{\frac{1}{2}} = s$$

2ième cas :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi\left(\frac{m/s^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = s^{-1}$$

I.2 Les vecteurs

Définition

- **Un vecteur est un être mathématique associé à un:**

  couple (A,B).

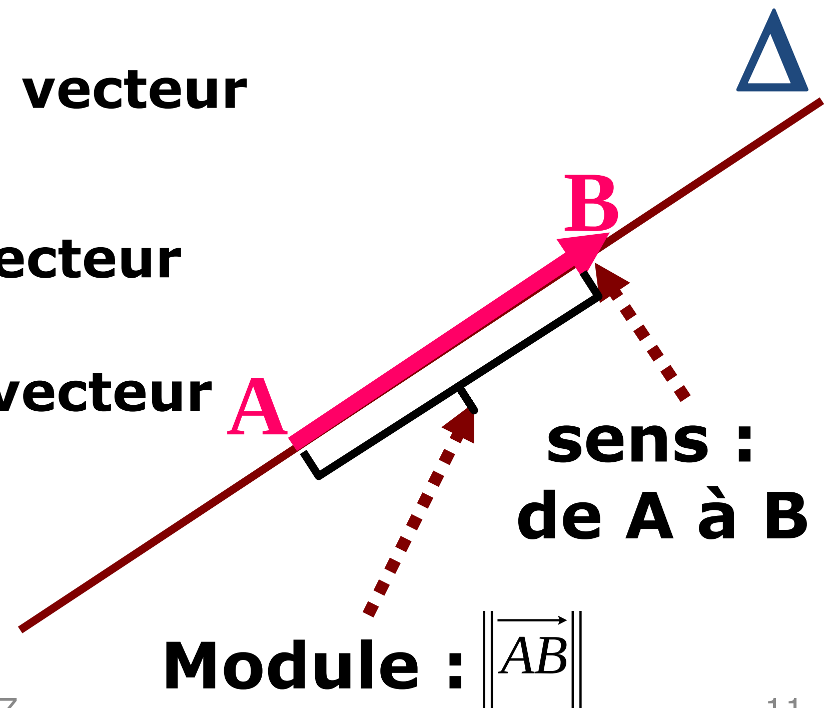
  l'origine **l'extrémité**

- **Il est caractérisé par :**

1. Sa direction : le support du vecteur

2. Son sens : orientation du vecteur

3. Son module : grandeur du vecteur



Vecteur unitaire

Un vecteur : $\vec{u}$ est unitaire si

$$\text{module de } \vec{u} = |\vec{u}| = \|\vec{u}\| = 1$$

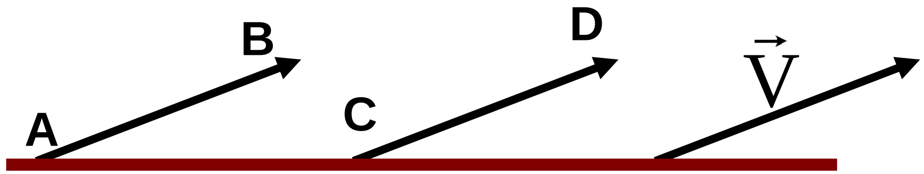
Vecteur unitaire associé à un vecteur quelconque

Soit un vecteur quelconque : $\vec{V}$

Vecteur unitaire associé à $\vec{V}$ est: $\vec{u} = \dfrac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$

OPPERATIONS SUR LES VECTEURS

- **On ne change pas les caractéristiques d'un vecteur par translation c'est-à-dire sa norme, sa direction, son sens restent les mêmes**



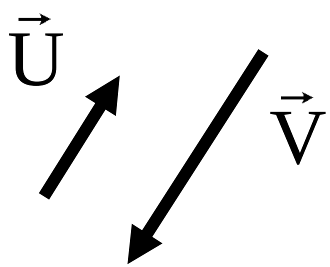
$$\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{V}$$

- **Deux vecteurs ayant même direction sont dits parallèles.**

- $\vec{AB} = -\vec{BA}$ **sont deux vecteurs de sens opposés**

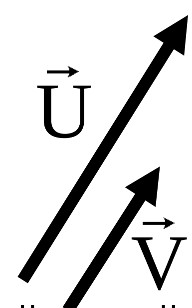
- $\vec{U} = \lambda \vec{V}$

Si λ négatif



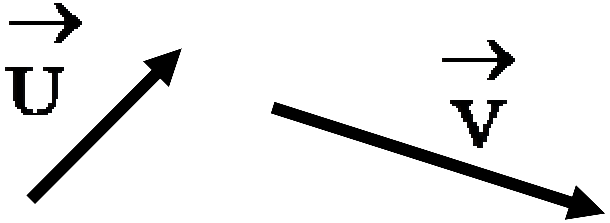
$$\left\|\vec{U}\right\| = -\lambda \left\|\vec{V}\right\| \geq 0$$

Si λ positif

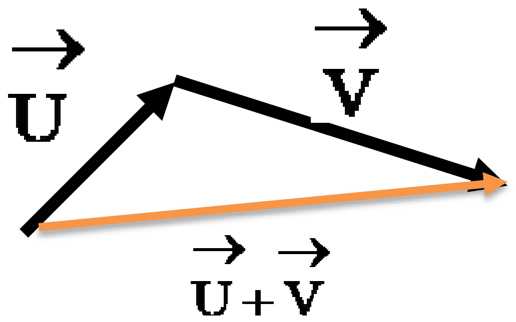


$$\left\|\vec{U}\right\| = \lambda \left\|\vec{V}\right\| \geq 0$$

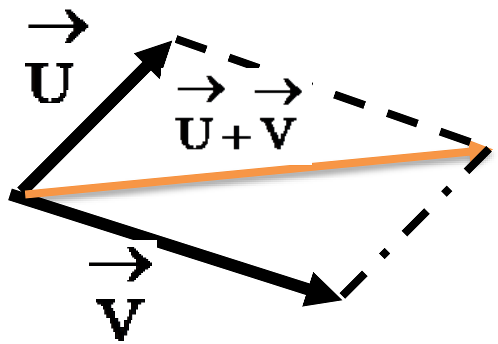
❖ Addition de deux vecteurs



1. Méthode du triangle



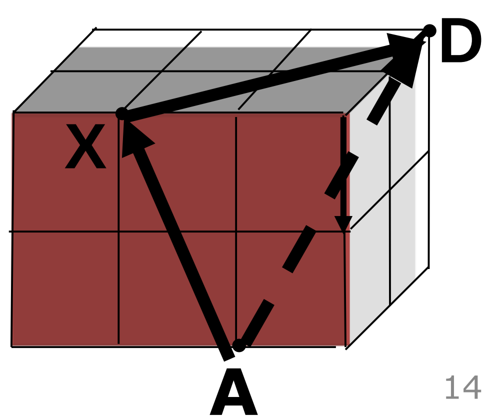
2. Méthode du parallélogramme



3.Relation de Chasles

Pour tout point A, D, et X du plan ou de l'espace, on a l'égalité :

$$\vec{AD} = \vec{AX} + \vec{XD}$$



Base orthonormée directe

$B=\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ **est une base** **orthonormé** **si:**

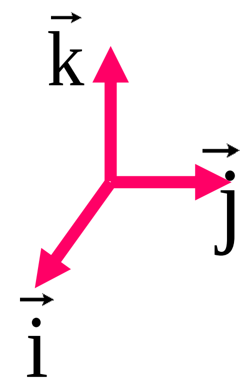
$\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux

$$\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$$

orthonormé

$\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires

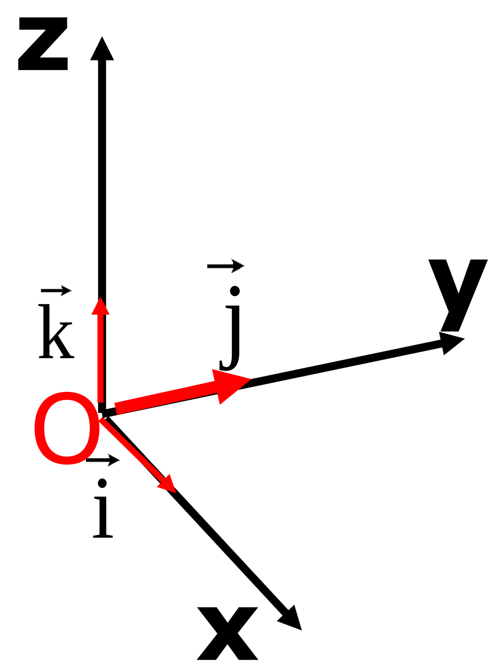
$$\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=\left\|\vec{k}\right\|=1$$



Repère orthonormé direct

Un repère R de l'espace est défini par :

- ❖ Un point de l'espace appelé origine : O
- ❖ Trois directions orientées x, y et z perpendiculaire deux à deux
  - ❖ base orthonormée: $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$



Terminologie:

On parle : repère (O,x,y,z) d'origine O muni de la base : $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Notation:

R(O,x,y,z) **ou** $R\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Composantes d'un vecteur

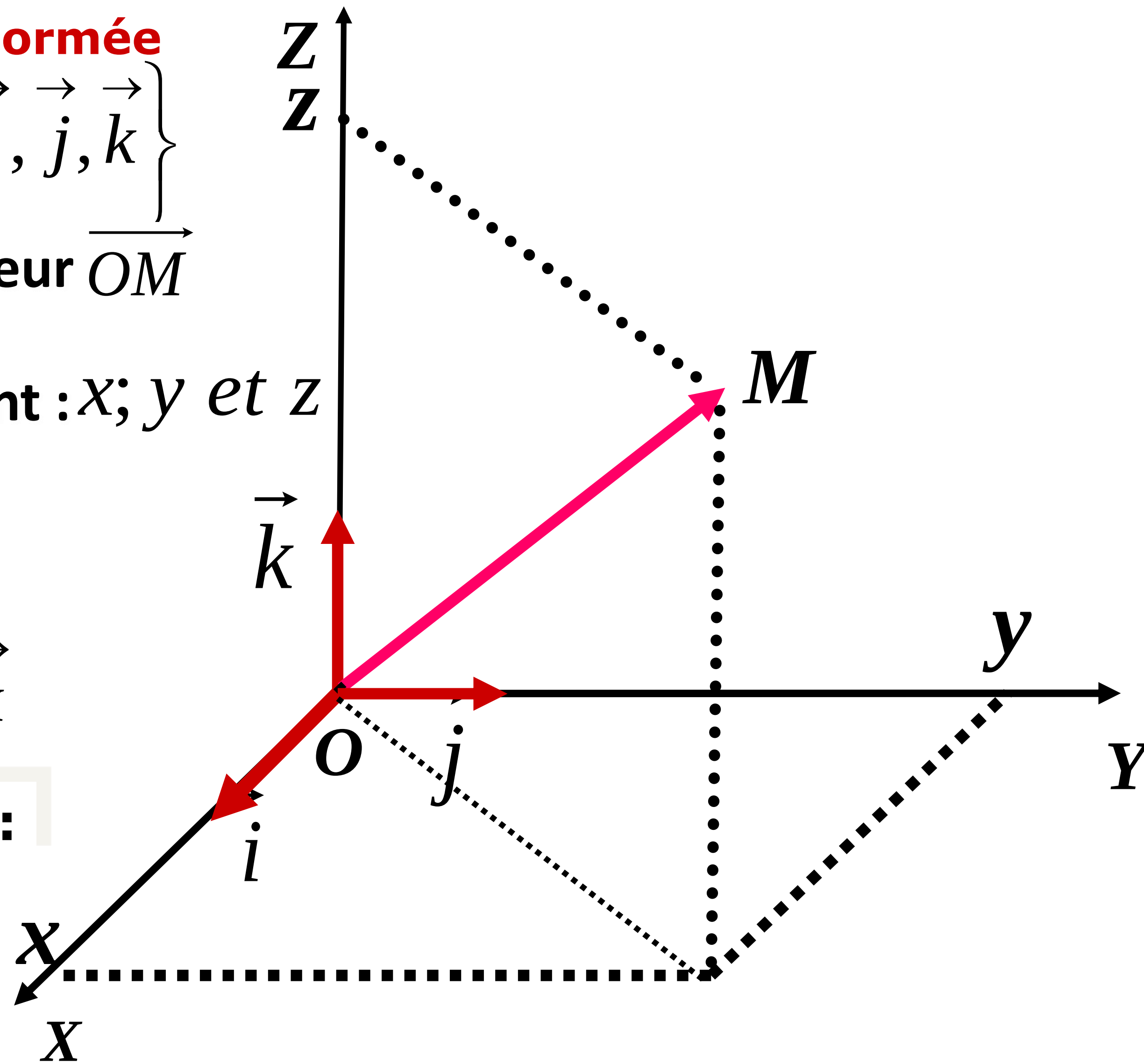
On considère un système d'axes tri-orthogonal

muni d'une base orthonormée

$$\left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$$

Les Composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$

dans la base $\left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ **Sont :** $x; y$ et z



On écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Le module de $\overrightarrow{OM}$ **est:**

$$\left\| \overrightarrow{OM} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

I.3 Produit scalaire

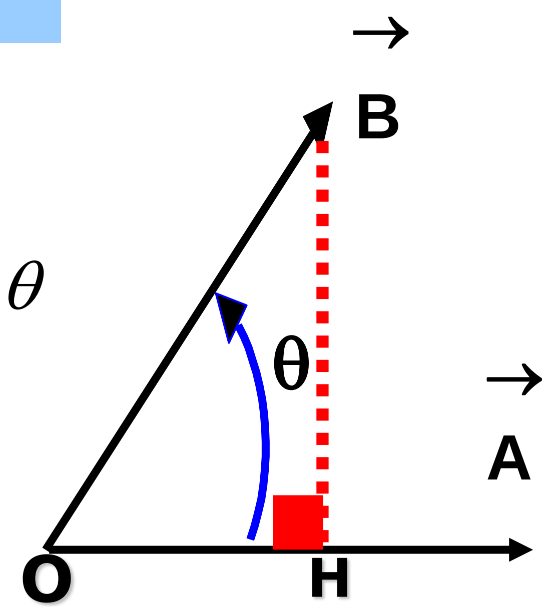
Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un scalaire défini par:

$$\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = \left\|\vec{\mathbf{A}}\right\| \times \left\|\vec{\mathbf{B}}\right\| \times \cos\theta = \vec{\mathbf{B}} \bullet \vec{\mathbf{A}}$$

On a:

$$\cos\theta = \frac{OH}{\left\|\vec{B}\right\|} \Rightarrow OH = \left\|\vec{B}\right\| \bullet \cos\theta$$



Or :

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \left\|\vec{A}\right\| \times \underbrace{\left\|\vec{B}\right\| \times \cos\theta}_{OH}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \bullet \vec{B} = \left\|\vec{A}\right\| \times OH$$

Produits scalaires élémentaires

Les vecteurs unitaires orthogonaux: $\left\{ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\ \vec{k} \right\}$ **(base cartésienne)**

Satisfont :

$$\vec{\mathbf{i}} \bullet \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}} \bullet \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} \bullet \vec{\mathbf{k}} = 1$$

$$\vec{\mathbf{i}} \bullet \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{j}} \bullet \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{k}} \bullet \vec{\mathbf{i}} = 0$$

Expression analytique du produits scalaires

Soient:

$$\begin{cases} \vec{A} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \\ \vec{B} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = x_1 x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

Composantes d'un vecteur

Soit: $\vec{A} = x\vec{i} + y\,\vec{j} + z\vec{k}$ $\quad x = \vec{A}.\vec{i} \qquad y = \vec{A}.\vec{j} \qquad z = \vec{A}.\vec{k}$

$$\vec{A} = \left(\vec{A}.\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{A}.\vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{A}.\vec{k}\right)\vec{k}$$

Propriétés du produits scalaires :

$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a} \\ (\lambda+\mu).\vec{a} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{a} \\ \lambda.(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu).\vec{a} \\ \lambda.(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda.\vec{a} + \lambda.\vec{b} \\ \vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} \end{cases}$$

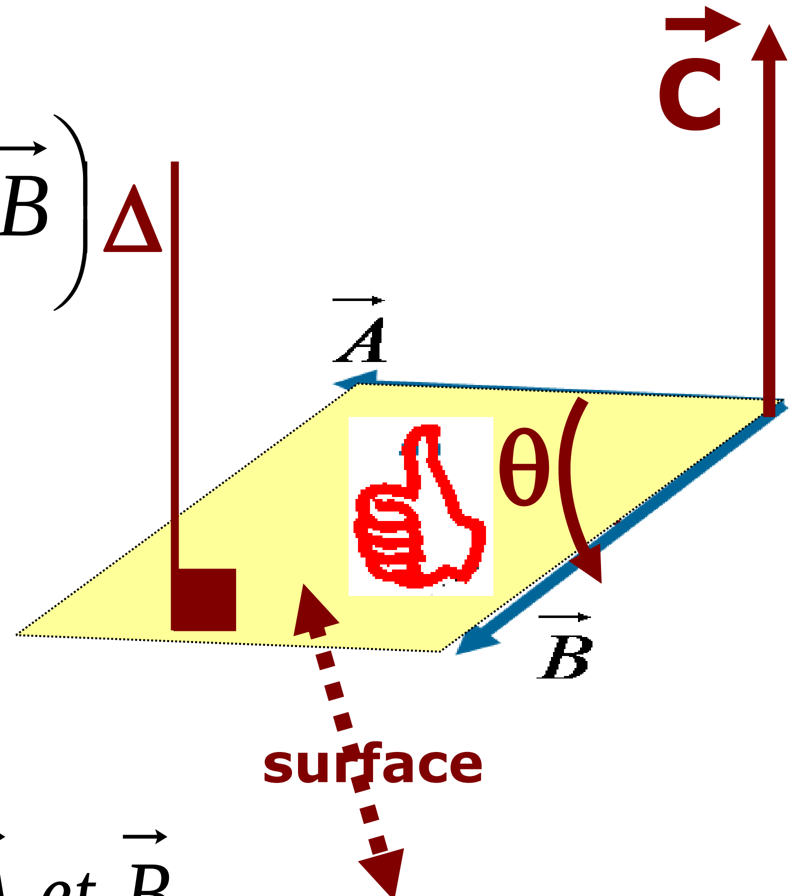
Commutativité

Distributivité

$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a}.\vec{a} = a^2 \end{cases}$$

I.4 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de $\vec{A}\ et\ \vec{B}\ \ noté : \vec{A}\wedge\vec{B}$ **est un vecteur :** $\vec{C}$ **tel que :**



- **Sa direction** $:\Delta \perp plan\left(\vec{A}\ et\ \vec{B}\right)$
- **Son sens :** $\left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right)$ **direct**
- **Son module :**

$$\left\|\vec{C}\right\| = \left\|\vec{A}\wedge\vec{B}\right\| = \left\|\vec{A}\right\| \times \left\|\vec{B}\right\| \sin\theta$$

Remarques

Le module du produit vectoriel de $\vec{A}\ et\ \vec{B}$

est la surface du parallélogramme formé par ses vecteurs.

$$\left\|\vec{A}\wedge\vec{B}\right\| = \left\|\vec{C}\right\|$$

Produits vectoriel élémentaire

Les vecteurs unitaires orthogonaux: $\left\{\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\vec{k}\right\}$ **base cartésienne**

Satisfont :

$$\vec{\mathbf{i}} \wedge \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}} \wedge \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} \wedge \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\vec{\mathbf{i}} \wedge \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}};\ \vec{\mathbf{j}} \wedge \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{i}}\,;\vec{\mathbf{k}} \wedge \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}}$$

Expression analytique du produit vectoriel

Soient: $\vec{A} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \qquad \vec{B} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \quad (-1) \quad \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

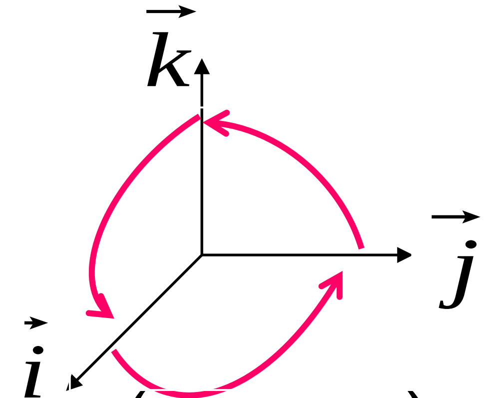
$$= \vec{i}\,(y_1 z_2 - z_1 y_2) + \vec{j}\,(z_1 x_2 - z_2 x_1)$$

$$+ \vec{k}\,(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

Propriétés du produits vectoriel :

$$\begin{cases} \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \\ \vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \end{cases}$$

Trièdre directe



$$\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$$

les vecteurs unitaires de la base cartésienne satisfont:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k};\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i};\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

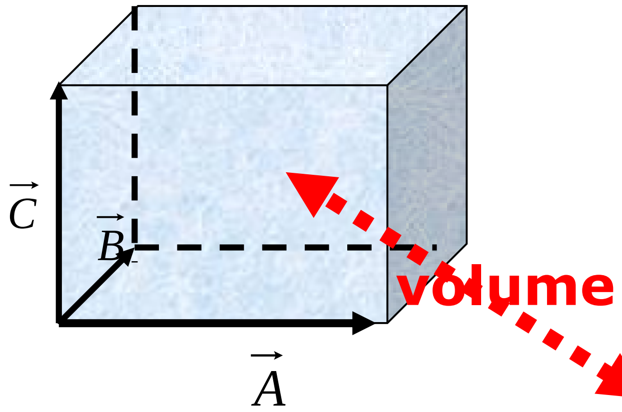
I.5 Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{A}\ ; \vec{B}\ et\ \vec{C}$

est un **scalaire** **défini par:** $\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\bullet\vec{C}=\left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right)\bullet\vec{B}=\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)\bullet\vec{A}$

Remarque:

le module du produit mixte de trois vecteurs est le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs



$\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\bullet\vec{C}$

I.6 Dérivée d'un vecteur

Soient: $\begin{cases} \vec{V} & \textit{un vecteur} \\ \textit{et } R(O,x,y,z) \textit{ un repère muni d'une base :} & (\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \end{cases}$

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$$

La dérivée de $\vec{V}(t)$ ***est:***

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_R = \left(\frac{dV_x}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dV_y}{dt}\right)\vec{j} + \left(\frac{dV_z}{dt}\right)\vec{k}$$

Remarque

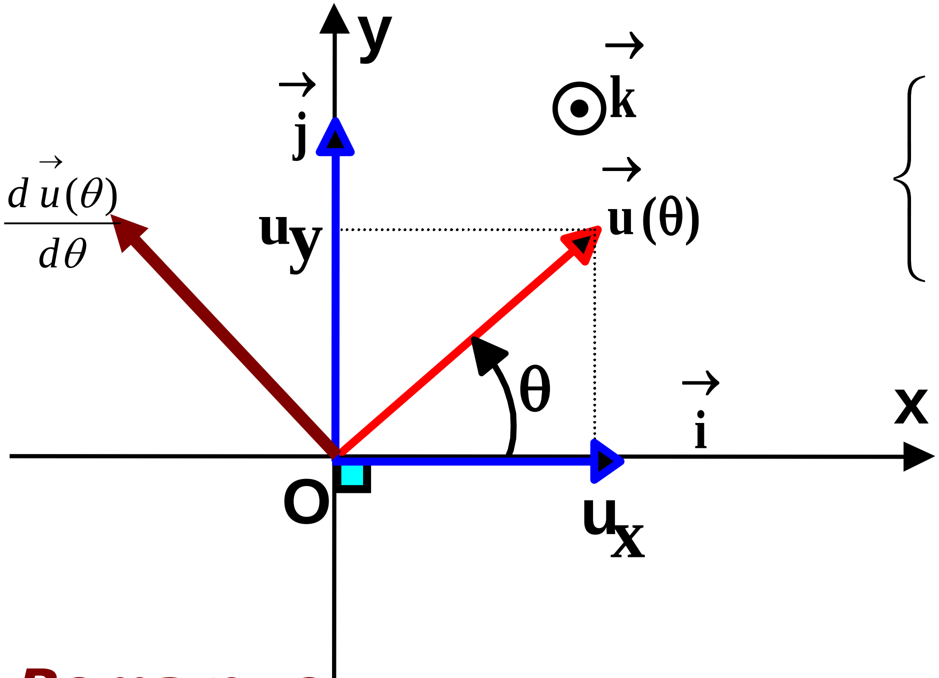
Soit: $\vec{u} = \dfrac{\vec{V}}{\left\|\vec{V}\right\|} = \dfrac{\vec{V}}{V}$ **Vecteur unitaire associé à** $\vec{V}(t)$

$$\vec{V} = V.\vec{u} \quad \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_R = \left(\frac{dV(t)}{dt}\right)_R \vec{u} + V(t)\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R$$

dérivée du module par rapport à t

dérivée du sens par rapport à t et par rapport à R

Dérivée d'un vecteur unitaire tournant



$$\begin{cases} u_x = \cos\theta \\ u_y = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

Remarque:

$$\left\| \frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} \right\| = (-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

$$\vec{u} \bullet \frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} = 0$$

$$\left(\vec{u}, \frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta}, \vec{k} \right)$$

est une base orthonormée directe

I.8 Différentielle d'une fonction à plusieurs variables

Soit une fonction à N variables:

$$f\,(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_N)$$

Définition

La différentielle de *f* est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N$$

Avec :

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ **la dérivée normale de *f* par rapport à xi en supposant que tout les** $x_j \;\; (j \neq i)$ **sont constants.**

la dérivée partielle de par rapport à xi

Exemple:

$$f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$$

La différentielle de *f* est : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

❖ $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 z^4$

la dérivée partielle de f par rapport à x

❖ $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 z^4$

la dérivée partielle de f par rapport à y

❖ $\frac{\partial f}{\partial Z} = 4x^2 y^3 z^3$

la dérivée partielle de f par rapport à z

Donc :

$$df = 2xy^3 z^4 dx + 3x^2 y^2 z^4 dy + 4x^2 y^3 z^3 dz$$

Résolution des équations différentielles

Les lois physiques sont formulées mathématiquement en termes d'équations différentielles ; loi fondamentale de la dynamique, équation des mouvements Harmoniques, etc…

1) La solution générale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a\,y' + b\,y = 0 \quad \textbf{est} \quad y = C\,e^{rt}$$

Où $r = -a/b$ est la solution de l'équation caractéristique $ar+b = 0$ et C est une constante.

2) La solution générale de l'équation (de l'oscillateur harmonique). :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \textbf{est} \quad y = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

où A et B sont deux constantes

3) La solution de l'équation du second ordre homogène à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = 0$$

On distingue trois cas, suivant la valeur du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

a) Si $\Delta > 0$; la solution générale est :

$$y = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

où A et B sont des constantes et

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

b) Si $\Delta > 0$; la solution générale est :

$$y = e^{rt}(At + B) \qquad r = \frac{-b}{2a}$$

c) Si $D < 0$; la solution générale est :

$$y = e^{\alpha t}(A \sin(\beta t) + B \cos(\beta t))$$

4) La solution de l'équation du second ordre homogène à coefficients constants avec Second membre :

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

La méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre est la suivante :

a) Recherche de la solution générale y_g de l'équation sans second membre (ESSM) associée par utilisation de l'équation caractéristique (EC).

$$ay'' + by' + cy = 0$$

b) Recherche d'une solution particulière y_p de l'équation avec second membre.

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

c) Utilisation de la formule $y = y_g + y_p$